Biomed. Technik
40 (1995), 333-336

O. Hochmuth
G. Lepschies
Beate Meffert

# Glättung und Differentiation mit nur einem Operator

## Smoothing and Differentiation with a single Operator

*Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Informatik*

*Schlüsselwörter*: Digitale Signalverarbeitung, Approximation, Signalfilterung, Differentiation, Bézierkurven, automatische Parameterbestimmung

Für die Filterung und Weiterverarbeitung von stark verrauschten Kraftkurven aus Untersuchungen an isolierten Herzmuskeln ist ein Operator erprobt worden, der sich aus der Konstruktionsvorschrift von Bézierkurven herleiten läßt. Vorteilhaft bei Anwendung der Bézierkurven ist, daß sich bei wesentlicher Veränderung eines Abtastwertes im Vergleich zu den anderen der resultierende Signalverlauf nur geringfügig ändert. Der abgeleitete Operator ist entweder nur zur Glättung einsetzbar oder läßt sich auf gleichzeitige Glättung und Differentiation erweitern. Mit der Filteroperation „Glätten und Ableiten in einem“ ist eine Differentiation auch stark verrauschter Signale erfolgreich durchführbar. Der Operator ist robust gegen Signalstörungen und besitzt Geschwindigkeits- und Komplexitätsvorteile.

*Key words*: Digital signal processing – approximation – signal filtering – differentiation – Bézier curves – automatic parameter determination

For the filtering and subsequent processing of of very noisy force curves obtained in studies of isolated heart muscles, an operator derived from the rules used in the construction of Bézier curves has been tested. The advantage of using the latter is that despite major changes in one sample as compared with another, the resulting curve changes only slightly. The derived operator permits either smoothing only or can be extended for both smoothing and differentiation simultaneously. With the filtering operation „smoothing and differentiation“, even very noisy signals can be successfully processed. The operator is insensitive to signal interference and has advantages in terms of speed and complexity.

### 1 Einleitung

Für die Erfassung und Auswertung von stark verrauschten Meßsignalen sind zwar eine ganze Reihe von Verfahren bekannt, trotzdem gibt es immer wieder Bemühungen, für die digitale Signalverarbeitung schnelle und algorithmisch einfach zu handhabende Methoden zu entwickeln. Die (digitale) Filterung von Signalen gehört zu den meist unverzichtbaren Standardroutinen, ohne die eine weitere Verarbeitung und Auswertung oft nicht möglich ist.

Der vorzustellende Operator ist entwickelt worden, um bei Experimenten mit isolierten Herzmuskelfasern stark verrauschte Kraftkurven auswerten zu können. Globale Filter auf der Basis der Fourier- oder anderer Orthogonaltransformationen eignen sich nur bedingt für solche Aufgaben, da sie bestimmte Forderungen an das zu filternde Signal stellen (Periodizität) und meist von erheblichem Aufwand sind. Lokale Filter auf der Basis der segmentierten Faltung können hier besser geeignet sein und oftmals schneller entworfen werden. Das Problem des Filterentwurfs reduziert sich dann auf die Wahl der für die jeweilige Aufgabenstellung geeigneten Operatoren (Filterkoeffizienten).

Ausgangspunkt für die Herleitung des hier verwendeten Operators ist ein Glättungsoperator (Tiefpaß) auf der Grundlage der Konstruktionsvorschrift für Bézierkurven. Er besitzt Eigenschaften, bestimmte Merkmale in der Kraftkurve hervorzuheben und das Rauschen zu unterdrücken. Wie bei anderen Glättungsoperatoren auch besteht jedoch die Gefahr, daß der optisch gut sichtbare Glättungseffekt darüber hinwegtäuscht, daß bei der Ableitung vor allem zeitkritischer Größen aus dem Signal (z. B. Zeitpunkt des Maximums, des Minimums oder der stärksten Kraftänderung) Fehler entstehen können. Aus dem Glättungsoperator ist deshalb ein Differenzierer mit Glättungseigenschaften abgeleitet worden, der diesen Nachteil vermeidet. Mit ihm ist eine einfache Differentiation auch von verrauschten Signalen möglich, ohne in jedem lokalen Extremwert des Signales gleich einen Nulldurchgang in der 1. Ableitung zu erzeugen. Maxima, Minima, Anstiege und die dazugehörigen Zeitpunkte sind dann einfach zu ermitteln und können digital weiterverarbeitet werden.

Die Eignung der Bézierkurven zur Herleitung eines solchen Operators ergibt sich aus der Tatsache, daß bei ihrer Anwendung nicht die Forderung erfüllt sein muß, daß sie durch jeden Abtastwert gehen müssen. Außerdem wird die Eigenschaft dieser Kurven ausgenutzt, daß sich bei wesentlicher Veränderung eines Abtastwertes im Vergleich zu den anderen der resultierende Signalverlauf nur geringfügig ändert.

## 2 Methode

Es sind viele Algorithmen zur Lösung von Filteraufgaben bekannt. Sie sollen am Anfang der beiden folgenden Kapitel kurz vorgestellt werden.

### *2.1 Herleitung des Glättungsoperators*

Zur Glättung digitalisierter Meßreihen sind die folgenden gängigen Methoden einsetzbar:

- Regression mit Polynomen [1]
  Es wird versucht, ein Polynom an gegebene Meßwerte mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate anzupassen. Nachteilig ist, daß die Meßwerte selten dem Kurvenverlauf eines Polynoms folgen. Abhilfe schafft manchmal die Verwendung von orthogonalen Polynomen.

- Approximation durch Fourierreihen [9]
  Ebenfalls mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate werden die Fourierkoeffizienten einer Fourierreihe berechnet. In der Praxis erfolgt die Berechnung mit der schnellen Fouriertransformation. Verwendet man nur den niederfrequenten Teil der berechneten Koeffizienten oder werden diese in bestimmter Art und Weise gewichtet, so tritt nach einer Rücktransformation ein Glättungseffekt ein. Aufgrund der begrenzten Anzahl der Meßwerte ergibt sich eine ungewollte Periodizität der Meßreihe mit den bekannten Effekten. Abhilfe schaffen geeignet gewählte Fensterfunktionen (Hamming, von Hann usw.).

- Nichtrekursive Digitalfilter [7]
  Lediglich ein kleiner Ausschnitt (Fenster) des digitalisierten Signals wird einer gewichteten Mittelwertbildung unterzogen. Der berechnete Mittelwert wird einer neuen Meßreihe zugeordnet. Die Meßreihe wird vervollständigt durch fortlaufendes Weiterrücken des Fensters über das zu filternde Signal. Die Gewichte für die Mittelwertbildung bilden eine Filterfunktion und sind nicht immer leicht zu finden. Modifiziert man die Summierung, so sind schnelle Algorithmen möglich.

- Rekursive Digitalfilter [7]
  Auch hier wird ein Signalausschnitt einer gewichteten Mittelwertbildung unterzogen, wobei aber schon berechnete Resultate mit einbezogen werden. Der Entwurf der Filterfunktion ist komplizierter als bei den nichtrekursiven Filtern, darüber hinaus sind Stabilitätsprobleme zu beachten. Trotzdem kommen sie wegen ihrer Steilheit und ihres einfachen Aufbaus in der Praxis bevorzugt zum Einsatz [6].

Die Herleitung der hier vorzustellenden Filterfunktion geschieht auf der Grundlage jeder Suche nach lokalen nichtrekursiven Operatoren. Im vorliegenden Fall erfolgt die Suche mit Hilfe von Bézierkurven [2, 8]. Diese werden vorrangig in der Architektur und bei der technischen Konstruktion von Kurven mittels Stützstellen verwendet [5]. Sie haben die günstige Eigenschaft, nicht durch die Stützstellen selbst gehen zu müssen, sondern werden nur mehr oder weniger stark von diesen angezogen und ignorieren somit Ausreißer. Die Gleichung (1) zeigt die parametrische Definition einer Bézierkurve:

$$f(u) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} y_i \qquad u \in [0,1]. \tag{1}$$

In der Gleichung werden folgende Größen verwendet: $y_i$ ist ein diskreter Meßwert aus der zu filternden Meßreihe $\{y\}$, $i$ ein Zählindex, $n+1$ die Breite des lokalen Signalausschnittes (Fensterbreite), und $f(u)$ sind die kontinuierlichen Werte mit einer reellen Zahl $u$ aus dem genannten Intervall. Beispielsweise ist der Funktionswert $f(u=0)$ der linke Abtastwert $y_0$ im Fenster und $f(u=1)$ der rechte Abtastwert $y_n$. Interessant ist aber lediglich der Funktionswert bei $u=1/2$, der schließlich als gewichteter Mittelwert $g_{n/2}$ in die geglättete Meßreihe $\{g\}$ übernommen werden soll:

$$g_{\frac{n}{2}} = f(1/2). \tag{2}$$

Weiterhin soll $n$ immer eine gerade Zahl sein. Formel (1) vereinfacht sich dann erheblich:

$$g_{\frac{n}{2}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{1}{2^i} (1-1/2)^{n-i} y_i. \tag{3}$$

$$g_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y_i. \tag{4}$$

Die Gleichung (5) gibt die diskreten Filterkoeffizienten $k_i$ an:

$$k_i = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i} \qquad i = 0 \ldots n. \tag{5}$$

Für eine konkrete Fensterbreite von $n+1=11$, also die lokale Umgebung eines Meßwertes mit seinen 5 Vorgängern und 5 Nachfolgern, sind die Filterkoeffizienten im Bild 1 gezeigt. Zur Filterung der gesamten Meßreihe $\{y\}$ wird ein Zeiger $j$ eingeführt und schließlich die allgemeine Formel (6) verwendet:

$$g_j = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} y_{j-\frac{n}{2}+i}. \tag{6}$$

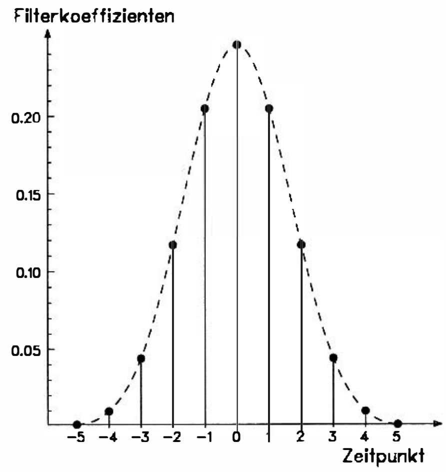


Bild 1. Filterkoeffizienten des Glättungsoperators für $n = 10$.

An den Rändern des Signals ergeben sich die üblichen Probleme. Bei einer genügend großen Anzahl von Abtastwerten, beispielsweise im Echtzeitbetrieb, kann die Mittelwertbildung für die Randwerte einfach weggelassen werden.

### *2.2 Herleitung des glättenden Ableitungsoperators*

Es gibt folgende Möglichkeiten, eine Meßreihe zu differenzieren:

- Differentiation eines Interpolationspolynomes [4]
  Eine der bekannten Interpolationsformeln wird einmal abgeleitet. Dazu verwendet man üblicherweise Newtons oder Stirlings Interpolationspolynome [7]. Diese Verfahren haben den Nachteil, daß sich Rechnungsfehler infolge Auslöschung sicherer Stellen stark auswirken.
- Differentiation mit Hilfe interpolierender kubischer Splines [4]
  Es kann hier eine bessere Übereinstimmung des Resultates mit der tatsächlichen Ableitung erwartet werden, da Splines bessere Eigenschaften als Interpolationspolynome besitzen. Sie neigen auch nicht zum Oszillieren an den Rändern und bei größeren Fensterbreiten.
- Differentiation nach dem Rombergverfahren [1]
  Diese Methode wurde aus dem Rombergverfahren zur numerischen Integration entwickelt. Rundungs- und Verfahrensfehler lassen sich gut abschätzen. Diese Differenzierer kommen bevorzugt zum Einsatz.

Die hier vorzustellende Methode benutzt wieder Bézierkurven zum numerischen Ausgleich und zur anschließenden Differenzierung. Diese Methode stellt gegenüber den genannten Verfahren insofern eine Besonderheit dar, als Bézierkurven keine interpolierenden Kurven sind. Wieder ist die Herleitung einfach. Die Gleichung (1) wird parametrisch abgeleitet:

$$df = \frac{\partial f}{\partial u}du = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left[u^i(1-u)^{n-i}\right]' y_i du, \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u}du \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left[iu^{i-1}(1-u)^{n-i} - u^i(n-i)(1-u)^{n-1-i}\right]y_i du. \end{aligned} \qquad (8)$$

In gleicher Weise wie beim Glättungsoperator interessiert nur der Wert für $u = 1/2$, da an dieser Stelle der gefilterte Meßwert $g_{n/2}$ zu finden ist:

$$dg_{\frac{n}{2}} = df(1/2) = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(2i-n)y_i du. \qquad (9)$$

Da Formel (9) parametrisch ist, erhält man erst nach weiteren Schritten die tatsächlich gesuchte 1. Ableitung in Form der Gleichung (10):

$$g_{\frac{n}{2}} = \frac{1}{n2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(2i-n)y_i. \qquad (10)$$

Die Gleichung (11) gibt die diskreten Filterkoeffizienten $k_i$ an:

$$k_i = \frac{1}{n2^{n-1}}\binom{n}{i}(2i-n) \qquad i = 0\ldots n. \qquad (11)$$

Für eine konkrete Fensterbreite von $n + 1 = 11$ sind die Filterkoeffizienten im Bild 2 dargestellt. Zur Filterung der gesamten Meßreihe wird die allgemeine Formel (12) verwendet:

$$g_j = \frac{1}{n2^{n-1}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(2i-n)y_{j-\frac{n}{2}+i}. \qquad (12)$$

In der Praxis kann dieses nichtrekursive lokale Filter als Alternative zur Methode „erst Glätten, dann Ableiten" gesehen werden, da zwei Verfahren durch eines ersetzt werden. Das bringt Geschwindigkeits- und Komplexitätsvorteile mit sich. Für den Grenzfall $n = 2$ ergibt Formel (12) eine herkömmliche 1. Ableitung, da der Glättungseffekt mit kleiner werdendem $n$ verschwindet.

## 3 Ergebnisse und Diskussion

Die vorgestellten Operatoren sind an Signalen aus einem Experiment zum Kontraktionsverhalten isolierter Herzmuskel erprobt worden. Die Untersuchungen wurden am Physiologischen Institut der Berliner Charité vorgenommen. In dem Experiment wird ein Streifen eines Herzmuskels (etwa 6 mal 1 Millimeter) von 2 Wolframdrähten fixiert. Der Herzmuskelstreifen befindet sich in einer Blutersatzlösung aus Wasser, Kochsalz, Kalzium und Glukose. Die Lösung wird temperiert (36 °C) und mit Sauerstoff angereichert. In der Küvette befinden sich noch 2 Platinelektroden, an die eine elektrische Spannung zur Reizung des Herzmuskels angelegt wird. Infolge der Reizgebung kontrahiert der Herzmuskel. Die von ihm aufgebrachte Kraft wird mit einer Kraftmeßdose gemessen und digitalisiert und kann dann weiterverarbeitet werden.

Aus dem Kraftsignal $F(t)$ werden üblicherweise

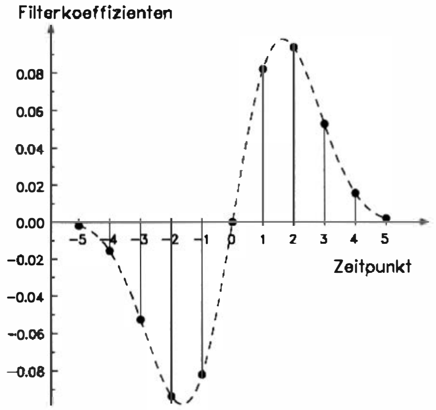


Bild 2. Filterkoeffizienten des glättenden Differenzierers für $n = 10$.

mehrere Parameter berechnet: beispielsweise maximale Kontraktionskraft, Latenzzeit und Dauer bis zum Kraftmaximum. Weitere Parameter müssen aus der differenzierten Kraftkurve $F'(t)$ ermittelt werden: zum Beispiel maximaler Kraftanstieg, maximaler Kraftabfall und die Zeit bis zum Erreichen desselben. Insgesamt werden 24 Parameter zur Charakterisierung eines Herzmuskels in diesem Experiment berechnet, die dann statistisch ausgewertet werden müssen. Bild 3 zeigt eine solche Kraftkurve und ihre 1. Ableitung. Zur Berechnung der Ableitung ist die Stirlingsche Differentiationsformel für eine Fensterbreite von 9 verwendet worden [7]. Man erkennt deutlich die aufrauhende Wirkung der Differentiation [4]; außerdem zeigt sich, daß sensorbedingtes Rauschen verstärkt wird und daß demzufolge einige der oben genannten Parameter nicht korrekt ermittelt werden können.

Bessere Ergebnisse sind zu erwarten, wenn der vorgestellte glättende Differenzierer angewendet wird. Es ergibt sich beispielsweise das im Bild 4 gezeigte Aus-

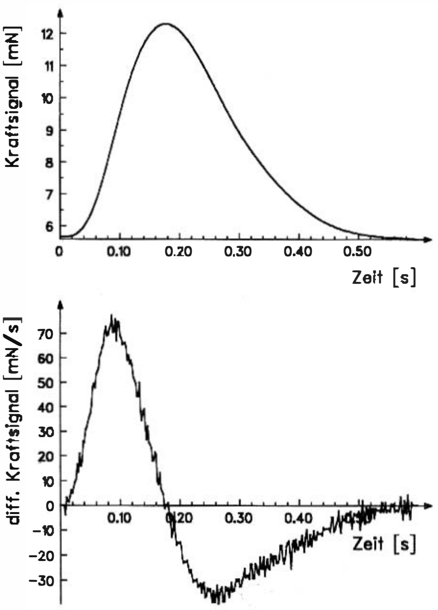


Bild 3. Kraftsignal aus dem Kontraktionsexperiment und seine 1. Ableitung.

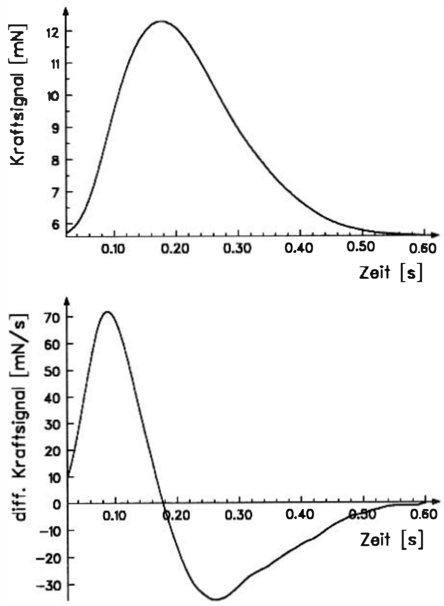


Bild 4. Kraftsignal und Resultat der Anwendung der glättenden Ableitungsoperation.

gangssignal, wenn die Gleichung (12) für eine Fensterbreite von $n+1=11$ verwendet wird. Aussagen über Maxima, Minima und Anstieg sind jetzt leichter möglich und automatisiert berechenbar. Bei den experimentellen Untersuchungen zum Kontraktionsverhalten isolierter Herzmuskel brachte die Anwendung des hier vorgestellten Operators gute Ergebnisse.

Die vorgestellten Operatoren sind vor allem günstig für die Bildung der 1. Ableitung, sie lassen sich aber für höhere Differentiationen erweitern. Es ist denkbar, diese Operatoren auch für zweidimensionale Signale zu erweitern und für die digitale Bildverarbeitung zu nutzen. In der Fotografie sind ähnliche Operatoren unter dem Namen „Unsharp Mask“ bekannt.

**Literatur:**

[1] Brandt, S.: Datenanalyse mit statistischen Methoden und Computerprogrammen. Mannheim, BI Wissenschaftsverlag 1992.

[2] Bronstein, I. N.; K. A. Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik. Leipzig, B. G. Teubner Verlag 1979.

[3] Elliott, D. F.: Handbook of Digital Signal Processing. San Diego, Academic Press 1987.

[4] Engeln-Müllges, G.; F. Reuter: Numerik-Algorithmen mit ANSI-C-Programmen. Mannheim, BI Wissenschaftsverlag 1990.

[5] Fellner, W. D.: Computergrafik. Mannheim, BI Wissenschaftsverlag 1992.

[6] Kammeyer, K. D.; K. Kroschel: Digitale Signalverarbeitung. Stuttgart, B. G. Teubner Verlag 1992.

[7] Schüßler, H. W.: Digitale Systeme zur Signalverarbeitung. Berlin, Springer-Verlag 1973.

[8] Stöcker, H.: Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren. Thun, Verlag Harri Deutsch 1993.

[9] Wupper, H.: Einführung in die digitale Signalverarbeitung. Heidelberg, Hüthig-Verlag 1989. 700

Korrespondenzanschrift:
Dr. Olaf Hochmuth
Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Informatik
Lindenstraße 54a
D-10117 Berlin